

OPCIÓN A

1.- Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en todo su dominio, dando expresiones de

$$\text{la derivada donde exista } \begin{cases} 1 + \operatorname{sen}^2 x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x^3 + 1} & \text{si } 0 < x < 1 \text{ [2'5 puntos]} \\ e^{x^2-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable, primeramente tiene que ser continua

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 + \operatorname{sen}^2 0 = 1 + 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sqrt{0^3 + 1} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{1^3 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^{1^2-1} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{2} \neq f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \text{No es continua en } x = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{sen} x \cos x & \text{si } x < 0 \\ \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{2xe^{x^2-1}}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 \operatorname{sen} 0 \cos 0 = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{3 \cdot 0^2}{2\sqrt{0^3+1}} = \frac{3 \cdot 0}{2\sqrt{0+1}} = \frac{0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \Rightarrow \text{En } x = 0 \text{ es derivable}$$

En $x = 1$ no lo es porque no cumple la condición de continuidad

2.- Calcular las siguientes integrales

$$a) \int x \ln x \, dx \quad (1 \text{ punto}) \qquad b) \int \frac{3}{x^2+4} \, dx \quad (1'5 \text{ puntos})$$

a)

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + K$$

$$\text{Por partes } \Rightarrow \begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ x \, dx = dv \Rightarrow v = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

b)

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-4} \Rightarrow \text{Solución compleja} \Rightarrow \text{No hay solución real}$$

$$3 \int \frac{dx}{x^2+4} = 3 \int \frac{dx}{4 \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right)} = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1} = \frac{3}{4} \int \frac{2 \, dt}{t^2 + 1} = \frac{6}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{3}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t = \frac{3}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + K$$

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2 \, dt$$

3.- Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide

a) Resolver el sistema $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases}$ [1'5 puntos]

b) Calcular el rango de $M = A \cdot B$ [1 punto]

a)

$$\begin{cases} 8X - 12Y = 4A \\ 9X + 12Y = 3B \end{cases} \Rightarrow 17X = 4A + 3B \Rightarrow 17X = 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$17X = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 4 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{12}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{14}{17} & -\frac{2}{17} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6X - 9Y = 3A \\ -6X - 8Y = -2B \end{cases} \Rightarrow -17Y = 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -17Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-17Y = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -9 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \left(-\frac{1}{17}\right) \cdot \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -9 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} \frac{7}{17} & -\frac{2}{17} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{9}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{9}{17} \\ -\frac{2}{17} & -\frac{7}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(M) = 2$$

4.- Dados la recta $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ y el punto $\mathbf{P}(1, 2, 3)$

a) Hallar la ecuación en forma general del plano que los contiene **[1 punto]**

b) Hallar las ecuaciones, en forma continua, en forma paramétrica y como intersección de dos planos correspondientes a la recta que pasa por \mathbf{P} y es perpendicular al plano anterior **[1'5 puntos]**

a) Para hallar la ecuación del plano π , utilizaremos el vector director de la recta, el vector que une a un punto \mathbf{R} cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) con el punto \mathbf{P} y el vector formado por este último punto y el punto \mathbf{G} genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) por lo que el último vector es combinación lineal de los otros dos y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano pedida

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, -1, 2) \\ \vec{PR} = (2, 0, 1) - (1, 2, 3) = (1, -2, -2) \equiv (-1, 2, 2) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 2, 3) = (x-1, y-2, z-3) \end{array} \right.$$

$$-2(x-1) - 2(y-2) + 6(z-3) - (z-3) - 4(x-1) - 6(y-2) = 0 \Rightarrow -6(x-1) - 8(y-2) + 5(z-3) = 0 \Rightarrow$$

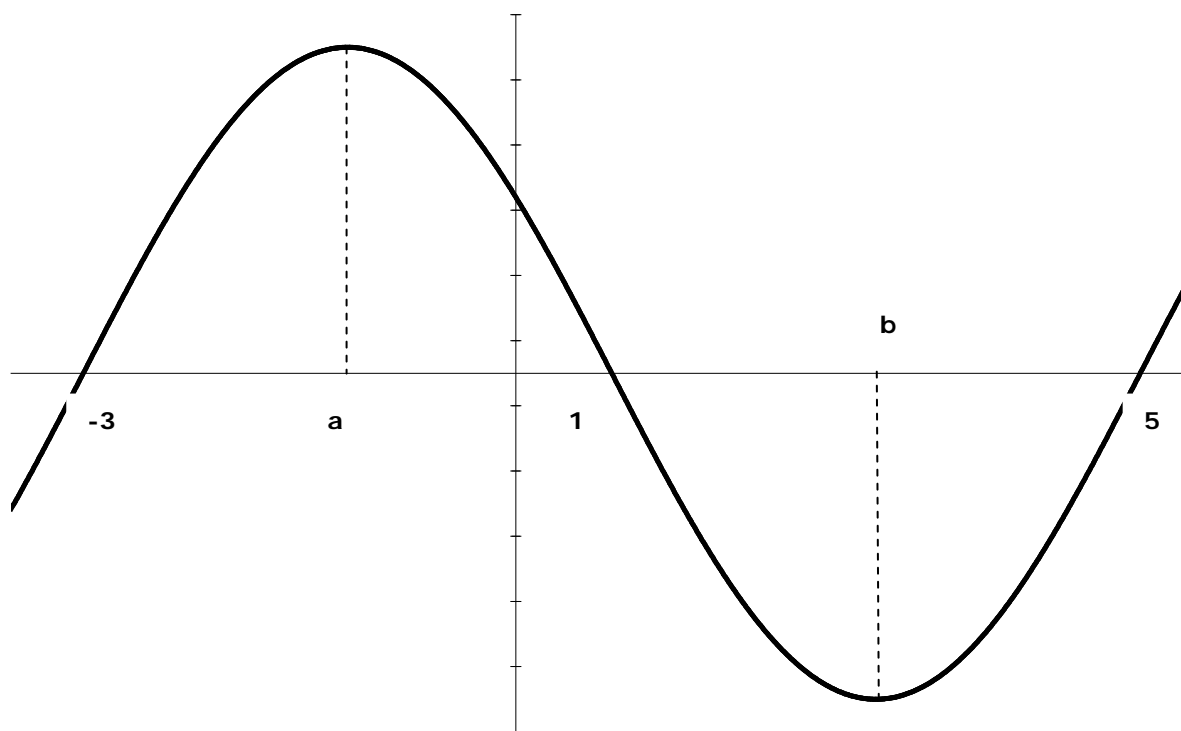
$$\pi \equiv 6x + 8y - 5z - 7 = 0$$

b) Llamemos s a la recta

$$\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (6, 8, -5) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Forma continua} \Rightarrow \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{-5} \\ \text{Forma paramétrica} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 2 + 8\lambda \\ z = 3 - 5\lambda \end{cases} \\ \text{Intersección de dos planos} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 8 = 6y - 12 \Rightarrow 8x - 6y + 4 = 0 \\ -5x + 5 = 6z - 18 \Rightarrow 5x + 6z - 23 = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

OPCIÓN B

1.-Indicar, para una función $f(x)$, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los valores de x que corresponden a sus máximos y mínimos relativos, así como sus intervalos de concavidad y convexidad, sabiendo que su función derivada tiene la siguiente gráfica:
(a = -1'33 y b = 3'3) [2'5 puntos]



$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / (-3 < x < 1) \cup (x > 5)$$

$$\text{Decrecimiento} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / (x < -3) \cup (1 < x < 5)$$

Mínimo relativo $x = -3 \rightarrow$ (De decrecimiento pasa a crecimiento)

Máximo relativo $x = 1 \rightarrow$ (De crecimiento pasa a decrecimiento)

Mínimo relativo $x = 5 \rightarrow$ (De decrecimiento pasa a crecimiento)

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1'33 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \\ b = 3'33 = \frac{13}{3} \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \end{cases}$$

$$\text{Concavidad} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / (x < -1'33) \cup (x > 4'33)$$

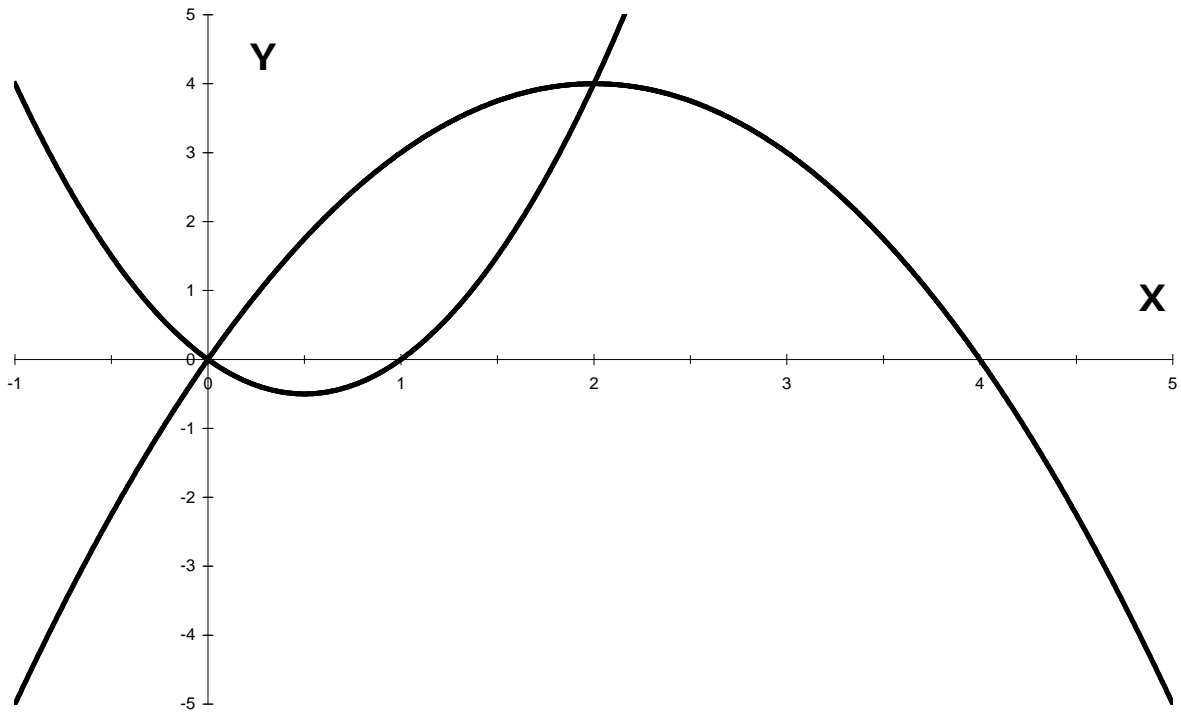
$$\text{Convexidad} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / -1'33 < x < 4'33$$

2.- Dadas las funciones $y = -x^2 + 4x$ y $y = 2x^2 - 2x$

a) Representar la región que determinan sus gráficas [1'5 puntos]

b) Calcular el área de dicha región [1 punto]

a)



$$\text{Llamando } \begin{cases} f(x) = -x^2 + 4x \\ g(x) = 2x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de corte} \Rightarrow \begin{cases} \text{De } f \begin{cases} \text{Con } OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ \text{Con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 4x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \\ \text{De } g \begin{cases} \text{Con } OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ \text{Con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo } \left(2, -2^2 + 4 \cdot 2 \right) \\ g'(x) = 4x - 2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow g''(x) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo } \left(\frac{1}{2}, 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \right) \end{cases}$$

Continuación del ejercicio 2 de la opción B

b)

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow -x^2 + 4x = 2x^2 - 2x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3(x-2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 (-x^2 + 4x) dx + \left| \int_0^1 (2x^2 - 2x) dx \right| + \int_1^2 (-x^2 + 4x) dx - \int_1^2 (2x^2 - 2x) dx$$

$$A = \int_0^1 (-x^2 + 4x) dx - \int_0^1 (2x^2 - 2x) dx + \int_1^2 (-x^2 + 4x) dx - \int_1^2 (2x^2 - 2x) dx$$

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 4x) dx - \int_0^2 (2x^2 - 2x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 4x - 2x^2 + 2x) dx = \int_0^2 (-3x^2 + 6x) dx$$

$$A = \int_0^2 (-3x^2 + 6x) dx = -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^2 + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 = -(2^3 - 0^3) + 3 \cdot (2^2 - 0^2) = -8 + 12 = 4 \text{ u}^2$$

Ejercicio 3.- Dado el sistema:
$$\begin{cases} ax - 3y + az = 1 \\ 3x + 2y = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro **a [1'75 puntos]**

b) Resolverlo cuando sea compatible **[0'75 puntos]**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 3a - 2a + 9 = -3a + 9 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -3a + 9 = 0 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

(Para todo) $\forall a \in \mathbb{R} - \{9\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Comp. Deter min ado}$

Si $a = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

Continuación del ejercicio 3 de la opción B

b) Cuando es Compatible Deter min ado $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{3\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-3a+9} = \frac{2-a+2a+3}{-3(a-3)} = \frac{a+5}{-3(a-3)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-3a+9} = \frac{a-2a-a-3}{-3(a-3)} = \frac{-2a-5}{-3(a-3)} = \frac{2a+5}{3(a-3)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-3a+9} = \frac{-2a-3-3-2+a-9}{-3(a-3)} = \frac{-a-17}{-3(a-3)} = \frac{a+17}{3(a-3)}$$

Ejercicio 4.- Dada las rectas secantes:

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{1} \quad y \quad s: (x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(-1, 6, 2)$$

- a) Calcular su punto de intersección **[1.75 puntos]**
 b) Hallar la ecuación del plano que las contiene **[0.75 puntos]**

a) Llamando **P** al punto de intersección

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 5 + 2s \\ z = 1 + s \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + 6\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - s = 1 - \lambda \\ 5 + 2s = -1 + 6\lambda \\ 1 + s = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -s + \lambda = -1 \\ 2s - 6\lambda = -6 \\ s - 2\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 - 2 \\ y = -1 + 6 \cdot 2 \\ z = 2 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 11, 4)$$

Continuación del ejercicio 4 de la opción B

b)

Para hallar la ecuación del plano π contaremos con los vectores directores de las dos rectas y el vector formado por \mathbf{P} y \mathbf{G} , siendo este el punto genérico del plano y como los tres son coplanarios el vector \mathbf{PG} es combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forman los tres vectores es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, 6, 2) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (-1, 11, 4) = (x+1, y-11, z-4) \end{array} \right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-11 & z-4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4(x+1) - (y-11) - 6(z-4) + 2(z-4) - 6(x+1) + 2(y-11) = 0 \Rightarrow -2(x+1) + (y-11) - 4(z-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - y + 4z - 3 = 0$$